

CAPITOLO 9 AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$$T: V \rightarrow V \quad \begin{array}{l} V \text{ q. nell' } \mathbb{K} \\ \text{ENDOMORFISMO} \end{array}$$

Def Un $v \in V - \{0\}$ si dice
AUTOVETTORE per T se vale

$$Tv = \lambda v$$

per un certo $\lambda \in \mathbb{K}$

In tal caso λ si dice AUTOVALORE
(relative a v).

Esempio $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} T \\ T \end{bmatrix}_{st} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

allora vale

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allora $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore per T

con autovalore 5

Anche $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore

$$T \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In questo esempio non ci sono altri autovettori oltre ai multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Supponiamo ora che per una certa

$$T: V \rightarrow V$$

esista una base $v_1, \dots, v_n$
fatta da auto-velettori

$$T v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$T v_2 = \lambda_2 v_2$$

$$T v_n = \lambda_n v_n$$

$v_1, \dots, v_n$ è base

(i λ_i potrebbero anche coincidere)

Allora

$$\begin{bmatrix} T \\ \vdots \\ T \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 & v_m \\ v_1 & v_m \end{matrix} = \begin{pmatrix} T v_1 & T v_2 & & \\ \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \begin{matrix} T v_1 \\ T v_2 \\ \vdots \\ T v_m \end{matrix}$$

la matrice $\bar{e}$ DIAGONALE!

$$T v_2 = \lambda_2 v_2 = 0 v_1 + \lambda_2 v_2 + 0 v_3 + \dots + 0 v_m$$

Esempio

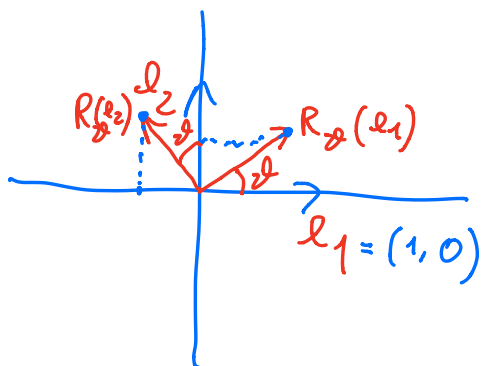
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def Un endomorfismo $T: V \rightarrow V$
 si dice diagonalizzabile se esiste
 una base di V $v_1, \dots, v_m$ fatta
 da autovettori.

Esempio

ROTAZIONI in $\mathbb{R}^2$

R_ϑ = ROTAZIONE di un angolo ϑ in $\mathbb{R}^2$



allorno all'origine
in senso antiorario

R_ϑ è una applicazione lineare

$$\begin{bmatrix} R_\vartheta \\ \vartheta \end{bmatrix}_{st} = \begin{pmatrix} R_\vartheta(e_1) & R_\vartheta(e_2) \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

($\vartheta \in [0, 2\pi)$)

Oss. che se $\mathcal{I} \neq 0$
 $\mathcal{I} \neq \overline{\Pi}$

$R_{\mathcal{I}}(v)$ non è un multiple di v

Dunque $R_{\mathcal{I}}$ NON HA
NESSUN AUTOVETTORE

Ma per esempio $\mathcal{I} = \frac{\overline{\Pi}}{6}$

$$\begin{bmatrix} R \\ \frac{\overline{\Pi}}{6} \end{bmatrix}_{\text{st}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO di
un endomorfismo $T: V \rightarrow V$

Def Dato $T: V \rightarrow V$, scelgo una
base di V $w_1, \dots, w_n$ e calcolo

$$[T]_{w_1, w_n}^{w_1, w_n}$$

Ora la matrice

$$t \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} - [T]_{w_1, w_n}^{w_1, w_n}$$

Calcolo

$$\det(tI - [T]_{w_1, w_n}^{w_1, w_n})$$

È un polinomio che si chiama

$P_T(t)$, il "polinomio caratteri-
stico di $T_{\parallel}$ "

Sempre ha $T = R_{\frac{\pi}{6}}$ vista sopra

Uelgo come base di $\mathbb{R}^2$ la base
standard.

$$\left[R_{\frac{\pi}{6}} \right]_{st}^{st} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calcolo

$$t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Ne calculo el det

$$P_{R_{\mathbb{H}}^G}(t) = \det \begin{pmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \left(t - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} =$$

$$= t^2 - \sqrt{3}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} =$$

$$= t^2 - \sqrt{3}t + 1$$

Le due radici?

$$\Delta = 3 - 4$$

$$t_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

DOMANDA: Ma il $p_T(t)$ dipende
dalla base v_1, v_n che ho scelto?

In altre parole: $P_T(t)$ è ben

definito?

Ricorda che se $w_1, \dots, w_m$ e $v_1, \dots, v_n$ sono due basi di V

$$\begin{bmatrix} T \\ \end{bmatrix}_{\substack{v_1 \dots v_n \\ v_1 \dots v_n}} = M^{-1} \begin{bmatrix} T \\ \end{bmatrix}_{\substack{w_1 \dots w_m \\ w_1 \dots w_m}} M$$

Le calcol

$$\det(tI - \begin{bmatrix} T \\ \end{bmatrix}_{\substack{v_1 \dots v_n \\ v_1 \dots v_n}}) =$$

$$= \det(tI - M^{-1} \begin{bmatrix} T \\ \end{bmatrix}_{\substack{w_1 \dots w_m \\ w_1 \dots w_m}} M)$$

$$= \det \left(M^{-1} (tI - M) - M^{-1} G \right)_{\substack{u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m}} M$$

$$= \det \left(\underset{\uparrow}{M^{-1}} \underbrace{(tI - [T]_{\substack{u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m}})}_{\uparrow} \underset{\uparrow}{M} \right)$$

$$= \det(M^{-1}) \det(tI - [T]_{\substack{u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m}}) \det(M)$$

$\uparrow$
 per Teorema di BINET

$$= \det(tI - [T]_{\substack{u_1 \dots u_m \\ v_1 \dots v_m}})$$

il
 loro
 prodotto fa 1
 ancora per
 BINET,
 vedi sotto.

Ho usato che $\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = 1$

In fatti $\det I = 1$

$$\parallel$$
$$\det(M \cdot M^{-1})$$

$\parallel$ per BINET

$$(\det M) (\det M^{-1})$$
$$\uparrow \quad \quad \uparrow$$

Teorema ^{9.2.5}

Dato $T: V \rightarrow V$
endomorfismo, gli autovalori di T
sono le radici di $p_T(t)$.

(se V è n . vett su K gli autovalori
di T sono le radici di $p_T(t)$ in K).

Dim Sia λ un autovettore di T .

Allora $\exists v \neq 0$ t.c.

$$Tv = \lambda v$$

cio' equivale a

$$Tv - \lambda v = 0$$

che equivale a

$$Tv - \lambda Iv = 0$$

che equivale a

$$\underbrace{(T - \lambda I)}_{\text{endomorphisms}} v = 0$$

Dunque

$$\text{Ker } T - \lambda I \neq \{0\}$$

perché $v \in \text{Ker } T - \lambda I$

Anche $\lambda I - T$ ha $\text{Ker} \neq \{0\}$

perché $(\lambda I - T)v = \lambda v - Tv = 0$

Allora $\det(\lambda I - T) = 0$

cioè

$P_T(\lambda) = 0$ cioè λ è una radice.

Viceversa, "risolvendo" la dimostrazione si vede che se λ è una radice di $P_T(t)$ allora λ è un autovalore.



Esempio Sia $S: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$

l'endomorfismo t_C

$$\begin{bmatrix} S \\ S \end{bmatrix}_{st}^{st} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$p_S(t) = \det \left(tI - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right)$$

$$= t^2 - \sqrt{3}t + 1$$

Le sue radici in $\mathbb{C}$ sono

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

SONO, per il lemma sopra, gli

autovettori di S .

Chi sono gli autovettori?

Gli autovettori relativi a λ_1

sono i v t.c. $Tv = \lambda_1 v$

quindi $Tv - \lambda_1 v = 0$

quindi sono gli elementi

del $\text{Ker}(T - \lambda_1 I)$
(a parte di 0).

Dunque devo calcolare

$\text{Ker}(T - \lambda_1 I)$

$$\text{Ker} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \end{pmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ker} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{MOSSA DI RIGA}$$

$$= \text{span} \left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$S \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di S .

Es Trovare un autovettore relativo

$$\text{a } \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

La S è dunque diagonalizzabile?